| | |
|---|---|
| **ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :** | **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. / Β' ΛΥΚΕΙΟΥ** |
| **ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** | **28 / 03 / 2026** |

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**Α1. (α)** $A^2+B^2-4\Gamma>0$ **(β)** $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ **/** $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$ **(γ)** τον άξονα x'x

**Α2. (α)** Σχολικό βιβλίο σελ. 83

**Α3. (i)** Λ **(ii)** Λ **(iii)** Σ **(iv)** Σ **(v)** Λ

### ΘΕΜΑ Β

**Β1. i)** Μ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε:

$$\frac{x_B+x_\Gamma}{2}=x_M \Leftrightarrow \frac{-2+x_\Gamma}{2}=1 \Leftrightarrow -2+x_\Gamma=2 \Leftrightarrow x_\Gamma=4 \quad \text{και}$$

$$\frac{y_B+y_\Gamma}{2}=y_M \Leftrightarrow \frac{2+y_\Gamma}{2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2+y_\Gamma=3 \Leftrightarrow y_\Gamma=1. \quad \text{Άρα } \Gamma(4,1).$$

**ii)** Εφόσον τα σημεία Α και Μ έχουν ίσες τετμημένες, η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου θα είναι παράλληλη στον άξονα y'y. Αφού διέρχεται από το Α(1,4), τότε θα έχει εξίσωση x = 1.

**Β2**. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΓ είναι $\lambda_{A\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A}=\frac{1-4}{4-1}=-1$.

Είναι $B\Delta\perp A\Gamma$, άρα $\lambda_{A\Gamma}\cdot\lambda_{B\Delta}=-1 \Leftrightarrow -1\cdot\lambda_{B\Delta}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta}=1$.

Άρα η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι $B\Delta: y-y_B=\lambda_{B\Delta}(x-x_B) \Leftrightarrow y-2=1\cdot(x+2)$

$\Leftrightarrow y=x+4$.

**Β3**. Έχουμε $\overrightarrow{AB}=(-2-1\ ,\ 2-4)=(-3,-2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(4-1\ ,\ 1-4)=(3,-3)$.

Συνεπώς $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 3 & -3\end{vmatrix}=(-3)(-3)-3(-2)=9+6=15$.

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι: $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}|15|=\frac{15}{2}$ τ.μ.

**Β4.** Ο ζητούμενος κύκλος C έχει κέντρο το μέσο Μ του ΒΓ και ακτίνα ρ το μισό του μήκους της διαμέτρου ΒΓ.

Άρα: $\rho=\frac{(B\Gamma)}{2}=\frac{\sqrt{(x_\Gamma-x_B)^2+(y_\Gamma-y_B)^2}}{2}=\frac{\sqrt{(4+2)^2+(1-2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{37}}{2}$.

Συνεπώς η εξίσωση του κύκλου είναι $C:(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{37}{4}$.

**ΘΕΜΑ Γ**

Έχουμε την εξίσωση $(\lambda + 1)x + (2\lambda - 9)y + 2 = 0$ , $\lambda \in R$ (1) .

**Γ1. i)** Για να παριστάνει ευθεία η εξίσωση (1), θα πρέπει $\lambda+1\neq 0$ ή $2\lambda-9\neq 0$.

Όμως έχουμε $\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ και $2\lambda-9=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{9}{2}$. Παρατηρούμε δηλαδή ότι δεν υπάρχει κοινή τιμή του λ για την οποία να μηδενίζονται συγχρόνως και οι δύο συντελεστές των x και y. Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in R$.

**ii)** Για να παριστάνει η (1) ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x θα πρέπει

$\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ και $2\lambda-9\neq 0$, άρα $\lambda\neq\frac{9}{2}$. Άρα για $\lambda=-1$.

**Γ2**. Αν λ = 3, τότε προκύπτει η ευθεία: $\varepsilon_1 : 4x-3y+2=0$. Ένα παράλληλο διάνυσμα στην ευθεία αυτή είναι το $\vec{\delta}_1=(-3,-4)$. Ένα παράλληλο διάνυσμα στην ευθεία $y=x \Leftrightarrow x-y=0$ είναι το $\vec{\delta}_2=(-1,-1)$. Το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι δύο ευθείες, θα είναι ίδιο με το συνημίτονο της οξείας γωνίας φ που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα.

Έχουμε λοιπόν $\vec{\delta}_1\vec{\delta}_2=(-3,-4)(-1,-1)=(-3)(-1)+(-4)(-1)=7$ και

$|\vec{\delta}_1|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$ , $|\vec{\delta}_2|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

Άρα θα είναι: $\sigma\upsilon\nu\varphi=\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2}\right)=\frac{\vec{\delta}_1\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1|\cdot|\vec{\delta}_2|}=\frac{7}{5\cdot\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

**Γ3.** Ο κύκλος C έχει το ίδιο κέντρο με αυτό του $C_1$, δηλαδή $K_1(3,-2)$ και ακτίνα ρ όσο η απόσταση του κέντρου $K_1$ από την ευθεία $\varepsilon_1 : 4x-3y+2=0$.

Είναι δηλαδή $\rho=d(K_1,\varepsilon_1)=\frac{|4\cdot 3-3\cdot(-2)+2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{20}{5}=4$.

Άρα έχει εξίσωση $C : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$.

**Γ4.** Η παραβολή $C_2$ εφόσον έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον x'x, θα έχει εξίσωση της μορφής $C_2 : y^2=2px$ και εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$.

Όμως το σημείο Ε είναι το σημείο τομής της $\varepsilon_1 : 4x-3y+2=0$ με τον άξονα x'x.

Για $y=0$, βρίσκουμε $4x-3\cdot 0+2=0 \Leftrightarrow 4x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$. Άρα $E\left(-\frac{1}{2},0\right)$, οπότε

$\frac{p}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow p=-1$. Άρα η εξίσωση της ζητούμενης παραβολής είναι $C_2 : y^2=-2x$.

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1. α)** Είναι $A = -4\kappa$ , $B = -2\kappa$ και $\Gamma = 4$. Για να παριστάνει κύκλο η εξίσωση (1), θα πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$. Οπότε έχουμε κύκλο όταν:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow (-4\kappa)^2 + (-2\kappa)^2 - 4\cdot 4 > 0 \Leftrightarrow 16\kappa^2 + 4\kappa^2 - 16 > 0$$

$$\Leftrightarrow 20\kappa^2 > 16 \Leftrightarrow \kappa^2 > \frac{4}{5} \Leftrightarrow |\kappa| > \sqrt{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \kappa < -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ ή } \kappa > \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

**β)** Το κέντρο του κύκλου έχει συντεταγμένες $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, άρα $K(2\kappa, \kappa)$.

Η ακτίνα του κύκλου: $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{20\kappa^2 - 16}}{2} = \frac{\sqrt{4(5\kappa^2 - 4)}}{2} = \sqrt{5\kappa^2 - 4}$.

**γ)** Είναι $K(2\kappa, \kappa)$, οπότε αν $x = 2\kappa$ και $y = \kappa$, θα προκύψει: . $x = 2\kappa \overset{y=k}{\Leftrightarrow} x = 2y$ .

Άρα τα κέντρα της οικογένειας κύκλων που εκφράζονται από την εξίσωση (1), βρίσκονται πάνω στην ευθεία $\zeta: x = 2y$ .

**Δ2.** Για κ = 1, από την εξίσωση (1) προκύπτει ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

Ο κύκλος C έχει κέντρο $K(2, 1)$ και ακτίνα $R = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 - 4\cdot 4}}{2} = 1$.

Ο κύκλος $C_1$: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$ έχει κέντρο $K_1(3, -1)$ και ακτίνα $\rho = 3$.

Η διάκεντρος τους $KK_1$ έχει μήκος $(KK_1) = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5}$.

Εφόσον $2 < \sqrt{5} < 4 \Leftrightarrow \rho - R < (KK_1) < \rho + R$, τότε οι 2 κύκλοι έχουν 2 κοινά σημεία.

Η διάκεντρος $KK_1$, έχει μέσο $M\left(\frac{2+3}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$, δηλαδή $M\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{KK_1} = \frac{-1-1}{3-2} = -2$. Η μεσοκάθετος (μ) της διακέντρου $KK_1$, δεδομένου ότι $\mu \perp KK_1$, θα έχει κλίση: $\lambda_\mu \cdot \lambda_{KK_1} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\mu \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\mu = \frac{1}{2}$.

Άρα η εξίσωση της μεσοκαθέτου (μ) της είναι $\mu: y - 0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$.

**Δ3. i)** Η παραβολή $C_2$, είναι της μορφής $y^2 = 2px$, άρα έχει κορυφή την αρχή O των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον x'x , εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $\delta: x = -\frac{p}{2}$ .

Εφόσον $2p = 8 \Leftrightarrow p = 4$, τότε $E(2,0)$ και $\delta: x = -2$.

**ii)** Από την εστία $E(2,0)$ της παραβολής, διέρχονται:

- Η κατακόρυφη ευθεία $x=2$, η οποία όμως δεν είναι μέσα στις ζητούμενες ευθείες, διότι απέχει $d=2$ από την αρχή των αξόνων.
- Όλες οι ευθείες με συντελεστή διεύθυνσης λ, οι οποίες είναι της μορφής: $\varepsilon:\ y-0=\lambda(x-2) \Leftrightarrow \lambda x-y-2\lambda=0$ .

Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει $d(\varepsilon,O)=\sqrt{3}$. Άρα έχουμε:

$$d(\varepsilon,O)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 0-0-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=\sqrt{3} \Leftrightarrow 2|\lambda|=\sqrt{3}\sqrt{\lambda^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (2|\lambda|)^2=\left(\sqrt{3}\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2 \Leftrightarrow 4\lambda^2=3(\lambda^2+1) \Leftrightarrow 4\lambda^2=3\lambda^2+3 \Leftrightarrow \lambda^2=3$$

$\Leftrightarrow \lambda=-\sqrt{3}$ ή $\lambda=\sqrt{3}$. Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι:

$\varepsilon_1:\ \sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$ και $\varepsilon_2:\ -\sqrt{3}x-y+2\sqrt{3}=0$.

**Δ4.** Οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $C_2: y^2=8x$ στο σημείο επαφής $B(x_1,y_1)$, είναι της μορφής $yy_1=p(x+x_1)$, δηλαδή

$\eta:\ yy_1=4(x+x_1) \Leftrightarrow 4x-y_1y+4x_1=0$.

Το κέντρο του κύκλου $C_3$: $x^2+y^2=2$, είναι το O(0,0) και η ακτίνα του $\rho_1=\sqrt{2}$.

Για να είναι η εφαπτομένη ευθεία (η) της παραβολής $C_2$, συγχρόνως και εφαπτομένη στον κύκλο $C_3$, θα πρέπει η απόσταση του Ο από αυτήν να είναι όσο η ακτίνα $\rho_1=\sqrt{2}$. Δηλαδή $d(\eta,O)=\sqrt{2}$. Άρα έχουμε:

$$d(\eta,O)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|4\cdot 0-y_1\cdot 0+4x_1|}{\sqrt{4^2+(-y_1)^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{4|x_1|}{\sqrt{4^2+y_1^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow 4|x_1|=\sqrt{2}\sqrt{16+y_1^2}$$

$16x_1^2=2(16+y_1^2) \Leftrightarrow 8x_1^2=16+y_1^2$ (2).

Όμως το $B(x_1,y_1)$ ανήκει στην παραβολή $C_2: y^2=8x$, οπότε $y_1^2=8x_1$.

Άρα η (2) γίνεται $8x_1^2=16+8x_1 \Leftrightarrow x_1^2=2+x_1 \Leftrightarrow x_1^2-x_1-2=0$.

Βρίσκουμε Δ=9 και ρίζες $x_1=-1$ και $x_1=2$.

Αν $x_1=-1$, τότε $y_1^2=8(-1) \Leftrightarrow y_1^2=-8<0$ (αδύνατη).

Αν $x_1=2$, τότε $y_1^2=8\cdot 2 \Leftrightarrow y_1^2=16 \Leftrightarrow y_1=-4$ ή $y_1=4$.

Άρα $B_1(2,-4)$ και $B_2(2,4)$. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι:

$\eta_1:\ 4x+4y+8=0 \Leftrightarrow x+y+2=0$ στο σημείο επαφής $B_1(2,-4)$ και

$\eta_2:\ 4x-4y+8=0 \Leftrightarrow x-y+2=0$ στο σημείο επαφής $B_2(2,4)$.